PRIMER NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Se tiene un tablero cuadriculado de 2×13 y, además, fichas de 1×2 y fichas de 1×3. Se quiere cubrir el tablero con las fichas, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero. Además, todas las fichas deben tener la misma orientación y no pueden ser todas del mismo tamaño. Determinar la cantidad de maneras en las que puede quedar cubierto el tablero.

Problema 2.
Melina escribió en el pizarrón cuatro números enteros positivos distintos y, a continuación, calculó el máximo común divisor de cada pareja formada por dos de esos cuatro números. Obtuvo así seis resultados distintos: 1, 2, 3, 4, 5 y *N*, con $N > 5$. Determinar el menor valor posible de *N*.
Nota. Dados dos números enteros a y b, el máximo común divisor de a y b es el mayor entero positivo d tal que d divide a a y d divide a b.

Problema 3.
Sea *ABCD* un paralelogramo con el lado *AB* mayor que el lado *BC* y el ángulo $\widehat{A}$ mayor que el ángulo $\widehat{B}$. Sea *X* un punto en el interior del *ABCD* tal que los triángulos *AXB*, *BXC* y el cuadrilátero *DAXC* tienen áreas iguales. Construir con regla no graduada y compás el punto *X*. Indicar los pasos de la construcción y explicar por qué satisface las condiciones del problema.

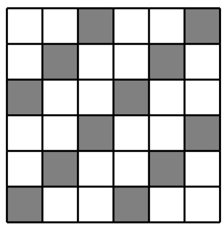
PRIMER NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
En una reunión hay 22 amigos, algunos son veraces, que siempre dicen la verdad, y los demás son mentirosos, que siempre mienten. Cada uno piensa un número real (no necesariamente entero). Los 22 amigos se ponen en fila y cada uno dice exactamente una frase. El primero dice “mi número es mayor que 1”; el segundo dice “mi número es mayor que 2”; el tercero dice “mi número es mayor que 3”; y así siguiendo hasta que el último dice “mi número es mayor que 22”. A continuación, cambian arbitrariamente de lugar en la fila y ahora, en el nuevo orden, cada amigo dice exactamente una frase. El primero dice “mi número es menor que 1”; el segundo dice “mi número es menor que 2”; el tercero dice “mi número es menor que 3”; y así siguiendo hasta que el último dice “mi número es menor que 22”. Determinar la máxima cantidad de veraces que puede haber entre los 22 amigos.

Problema 5.
Un tablero de 6×6 está pintado de blanco y de negro como en la figura. Una movida consiste en elegir un cuadrado de 2×2 (que abarque exactamente cuatro casillas del tablero) y cambiar simultáneamente los colores de las cuatro casillas de la siguiente manera: las casillas blancas cambian a azules, las azules cambian a negras y las negras cambian a blancas. Decidir si realizando varias de estas movidas es posible obtener al final un tablero en el que todas las casillas que eran inicialmente blancas finalicen negras y todas las que eran inicialmente negras finalicen blancas.



Problema 6.
Sea M el conjunto de todos los resultados de multiplicar dos primos positivos distintos que sean divisores de 30030. Facu elige números de M de manera que entre los elegidos no haya tres que multiplicados den 30030 (o sea, no haya tres números a, b, c, tales que $a\cdot b\cdot c = 30030$).
Determinar la mayor cantidad de números de M que puede elegir Facu.
Nota. 1 no es primo.

SEGUNDO NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Hallar todos los números reales x tales que exactamente uno de los cuatro números $x-\sqrt{2}$, $x-\frac{1}{x}$, $x+\frac{1}{x}$ y $x^2+2\sqrt{2}$ **no** es un número entero.

Problema 2.
Uri debe pintar de rojo algunos números enteros desde 1 hasta 2022 inclusive, a su elección, de manera que ninguna de las diferencias entre dos números rojos sea igual a un número primo. Determinar la máxima cantidad de números que puede pintar Uri de rojo.
Nota 1. La diferencia entre dos números distintos es la resta del mayor menos el menor.
Nota 2. 1 no es primo.

Problema 3.
Sean A, X, Y tres puntos no alineados del plano. Construir con regla no graduada y compás un cuadrado $ABCD$ tal que uno de sus vértices sea A y además X esté en la recta determinada por B y C e Y esté en la recta determinada por C y D.

SEGUNDO NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Determinar el menor número entero positivo n que es igual a la suma de 11 números enteros positivos consecutivos, también es igual a la suma de 12 números enteros positivos consecutivos y además es igual a la suma de 13 números enteros positivos consecutivos.

Problema 5.
Determinar todos los números enteros positivos que **no** pueden escribirse como $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$, donde a y b son números enteros positivos.

Problema 6.
En un torneo de hockey participan una cantidad impar n de equipos. Cada equipo juega exactamente un partido con cada uno de los otros. En este torneo, cada equipo recibe 2 puntos por partido ganado, 1 punto por partido empatado y 0 puntos por partido perdido. Al terminar el torneo se observó que todos los puntajes obtenidos por los n equipos eran diferentes. Para cada n, determinar la mayor cantidad posible de empates que pudo tener este torneo.

TERCER NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Para todo número entero positivo *n* se define $P(n)$ de la siguiente manera: Para cada divisor primo *p* de *n* se considera el mayor entero *k* tal que $p^k \leq n$ y se suman todos los p^k. Por ejemplo, para $n = 100 = 2^2 \cdot 5^2$, como $2^6 < 100 < 2^7$ y $5^2 < 100 < 5^3$, resulta que $P(100) = 2^6 + 5^2 = 89$. Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* tales que $P(n) > n$.

Problema 2.
Determinar todos los enteros positivos *n* para los que se pueden escribir en algún orden los *n* números enteros entre 1 y *n* inclusive, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$, con la propiedad de que el número $x_1 + x_2 + ... + x_k$ sea divisible por *k*, para todo $1 \leq k \leq n$. Es decir, que

1 divide a x_1, 2 divide a $x_1 + x_2$, 3 divide a $x_1 + x_2 + x_3$,
y así siguiendo hasta que *n* divide a $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Problema 3.
Dado un cuadrado *ABCD* consideremos un triángulo equilátero *KLM*, cuyos vértices *K, L, M* pertenecen a los lados *AB, BC, CD* respectivamente. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los lados *KL* para todos los posibles triángulos equiláteros *KLM*.
Nota. Se denomina lugar geométrico al conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.

TERCER NIVEL

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Consideramos un tablero cuadrado de 1000×1000 con 1000000 casillas de 1×1. Una ficha colocada en una casilla amenaza a todas las casillas el tablero que están adentro de un cuadrado de 19×19 con centro en la casilla donde está colocada la ficha, y de lados paralelos a los del tablero, excepto las casillas de su misma fila y las de su misma columna. Determinar el máximo número de fichas que se pueden colocar en el tablero de modo que no haya dos que se amenacen.

Problema 5.
Hallar todos los pares de números enteros positivos x, y tales que

$$x^3 + y^3 = 4(x^2 y + xy^2 - 5).$$

Problema 6.
Para cada entero positivo n consideramos el polinomio de coeficientes reales, de $2n+1$ términos,

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde todos los coeficientes son números reales que satisfacen $100 \le a_i \le 101$ para $0 \le i \le 2n$.
Hallar el menor valor posible de n tal que el polinomio puede tener al menos una raíz real.